

The canonical trace of Stanley–Reisner rings that are Gorenstein on the punctured spectrum

大阪大学大学院 情報科学研究科 情報基礎数学専攻
宮下 空 (Sora MIYASHITA) *

Abstract

本稿を通じて、 $\mathbb{k}$ は常に体とする。本稿では、クルル次元が 3 以上の nearly Gorenstein Stanley–Reisner 環は全て Gorenstein であることを報告する。著者のこれまでの研究とあわせることで、nearly Gorenstein Stanley–Reisner 環の完全な特徴づけが得られる。さらに、Cohen–Macaulay Stanley–Reisner 環 $\mathbb{k}[\Delta]$ が punctured spectrum 上 Gorenstein であることは、 $\mathbb{k}[\Delta]$ が nearly Gorenstein である場合、または $\mathbb{k}[\Delta]$ の正準トレースが次数付き極大イデアルの平方である場合に限る。特に後者は Δ が向き付け不可能ホモロジー多様体であることと同値である。

1 導入

本稿の内容はジェノバ大学の Matteo Varbaro 氏との共同研究 ([10]) に基づく。Cohen–Macaulay 局所環 (または次数付き環) R の正準加群 $\mathrm{tr}(\omega_R)$ のトレースは、対応する代数多様体の非 Gorenstein 軌跡を記述し [12, Lemma 6.19] または [13, Lemma 2.1] を参照), 近年「正準トレース」に関する活発な研究を引き起こしている [4, 5, 7, 8, 13] を参照。特に興味深いのは、正準トレースが次数付き極大イデアル $\mathfrak{m}_R$ を含む Cohen–Macaulay 環 R のクラスであり、これは punctured spectrum 上 Gorenstein である環に含まれるクラスである。これらの環は、Herzog, Hibi, および Stamate によって [13] で「nearly Gorenstein 環」として再導入されて以来、様々な文脈でその性質を探索する多くの研究が行われ、研究の焦点となっている ([1, 3, 6, 11, 14–18, 21, 22, 24] を参照)。

特に、低次元の単体的複体から生じる nearly Gorenstein Stanley–Reisner 環については、[20, Section 4] で調査されている。結論として、[20] は次の問いを提起した: 「クルル次元が 3 以上の Cohen–Macaulay Stanley–Reisner 環において、nearly Gorenstein 性は Gorenstein 性と同値か？」本報告では、punctured spectrum 上 Gorenstein である Stanley–Reisner 環の正準トレースを分類する。これにより、前述の問いに肯定的な解答を与えることが本稿の目的である。

2 準備

この節では、主要な結果を述べるために必要な記号を準備する。本報告全体を通じて、非負整数の集合を $\mathbb{N}$, 整数の集合を $\mathbb{Z}$ と表す。さらに非負次数付き Noether 環 $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ に対して、常に R_0 が体であると仮定する。この文脈において、すべての非負次数付き Noether 環 R はただ一つ

*E-mail: u804642k@ecs.osaka-u.ac.jp

の次数付き極大イデアル $\mathfrak{M}_R$ を持ち、次数付き正準加群 ω_R を持つ。 R の a -不変量を a_R とする。 $a_R = -\min\{j : (\omega_R)_j \neq 0\}$ である。 $\mathbb{Z}$ -次数付き R -加群 M に対して、 $\mathrm{tr}_R(M)$ を次のように定義する： $\phi \in \mathrm{Hom}_R^*(M, R) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R^i(M, R)$ (M が有限生成なら $\mathrm{Hom}_R^*(M, R) = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ であることに注意) を満たす写像 ϕ によるイデアル $\phi(M)$ の和である。 すなわち、

$$\mathrm{tr}_R(M) = \sum_{\phi \in \mathrm{Hom}_R^*(M, R)} \phi(M).$$

ここで $\mathrm{Hom}_R^i(M, R) = \{\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, R) : \phi(M_k) \subseteq R_{k+i} \text{ for any } k \in \mathbb{Z}\}$. 係数環について混乱の余地がないとき、単に $\mathrm{tr}(M)$ と書く。 R が Cohen–Macaulay であるとき、 $\mathrm{tr}(\omega_R)$ は非 Gorenstein 軌跡を記述することが知られている ([12, Lemma 6.19] または [13, Lemma 2.1] を参照)。 R が *punctured spectrum* 上 Gorenstein であるとは、 R の任意の次数付き素イデアル $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{M}_R$ に対して $R_{\mathfrak{p}}$ が Gorenstein であることを意味する。 この定義は R 自体が Cohen–Macaulay である必要はないことに注意する。 以下の3つの定義では、 R が Cohen–Macaulay であると仮定する。

Definition 2.1. R が *nearly Gorenstein* [13] とは、 $\mathrm{tr}(\omega_R) \supseteq \mathfrak{M}_R$ であることをいう。 R が *punctured spectrum* $\mathrm{Spec}(R) \setminus \{\mathfrak{M}_R\}$ 上 Gorenstein であることは、 $\sqrt{\mathrm{tr}(\omega_R)} \supseteq \mathfrak{M}_R$ と同値である ([13, Lemma 2.1]). 特に nearly Gorenstein 環は必ず *punctured spectrum* 上 Gorenstein である。

以下、次数付き環の文脈で Gorenstein 環の最初期の一般化の一つである level 環 ([25]) と almost Gorenstein(次数付き) 環の定義を述べる。 本稿の最後で *punctured spectrum* 上 Gorenstein である環とこれらのクラスの関係性を明らかにする。

Definition 2.2. R が *level* ([25]) であるとは、 ω_R が次数付き R -加群として同じ次数からなる生成系をもつことをいう。 R が *almost Gorenstein* ([9, Section 10]) であるとは、 R -加群の次数0の単射 $\phi : R \hookrightarrow \omega_R(-a_R)$ が存在し、余核 $C := \mathrm{coker}(\phi)$ が (0) か、または Ulrich R -加群であることを意味する。 すなわち、 C が Cohen–Macaulay (この場合は自動的に成り立つ) であり、 $\mu(C) = e(C)$ である。 ここで、 $\mu(C)$ (または $e(C)$) はそれぞれ C の極小生成系の元の個数 (または $\mathfrak{M}_R$ に関する C の重複度) を表し、 $\omega_R(-a_R)$ は R -加群の構造は ω_R と同じだが、その次数を $-a_R$ だけずらした次数付き R -加群である。 つまり、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $[\omega_R(-a_R)]_n = [\omega_R]_{n-a_R}$ で次数が定まる。

次に、本報告で必要となる Stanley–Reisner 環に関連する用語をまとめる。 $S = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ を n 変数の多項式環とし、標準的な次数付け $\deg(x_i) = 1$ を備えている。

n 頂点からなる単体的複体 Δ について、Stanley–Reisner イデアル $I_{\Delta} \subseteq S$ は、 $\{i_1, \dots, i_s\} \notin \Delta$ を満たす単項式 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_s}$ によって生成されるイデアルである。 この対応は、 n 頂点の単体的複体と S の平方自由な単項式イデアルとの間の全単射を与える。 剰余環 $\mathbb{k}[\Delta] = S/I_{\Delta}$ を Δ の *Stanley–Reisner* 環と呼ぶ。 単体 $\sigma \in \Delta$ の次元を $\dim \sigma = |\sigma| - 1$ 、単体的複体 Δ の次元を $\dim \Delta = \max\{\dim \sigma : \sigma \in \Delta\}$ と定義する。 $\sigma \in \Delta$ が Δ の i -face であるとは、 $\dim \sigma = i$ であることをいう。 Δ の単体の中で包含関係で極大であるものを *ファセット* と呼ぶ。 $\mathcal{F}(\Delta)$ を Δ のファセットの集合とし、 $\dim \sigma = \dim \Delta$ が任意の $\sigma \in \mathcal{F}(\Delta)$ について成り立つとき、 Δ は *純* であるという。 単体的複体 Δ が *強連結* であるとは、任意の $\sigma, \tau \in \mathcal{F}(\Delta)$ に対して、 $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \in \mathcal{F}(\Delta)$ が存在し、 $\sigma_0 = \sigma$, $\sigma_k = \tau$ かつ任意の $i = 1, \dots, k$ について $\dim \sigma_i \cap \sigma_{i-1} = \dim \Delta - 1$ が成り立つことをいう。 Δ が *強連結* であるとき、必ず Δ は *純* である。 任意の $\sigma \in \Delta$ に対して、その *star*,

costar および *link* を以下の単体的複体として定義する:

$$\begin{aligned} \text{st}_\Delta \sigma &= \{\tau \in \Delta : \tau \cup \sigma \in \Delta\}, \\ \text{cost}_\Delta \sigma &= \{\tau \in \Delta : \tau \not\supseteq \sigma\}, \\ \text{lk}_\Delta \sigma &= \{\tau \in \Delta : \tau \cup \sigma \in \Delta \text{ and } \tau \cap \sigma = \emptyset\}. \end{aligned}$$

$\text{lk}_\Delta \sigma = \text{st}_\Delta \sigma \cap \text{cost}_\Delta \sigma$ であることに注意する. Δ の単体 $\tau \in \Delta$ が 錐 であるとは, 任意のファセット $\sigma \in \mathcal{F}(\Delta)$ に対して $\tau \in \sigma$ であることをいう. 単体的複体 Δ が 正規 であるとは, $\dim \Delta \geq 1$ の任意の i -face σ に対して $\text{lk}_\Delta \sigma$ が連結であることを意味する. $\dim \emptyset = -1$ および $\text{lk}_\Delta \emptyset = \Delta$ であるため, 次元が少なくとも 1 の正規単体的複体は連結である. $d = \dim(\Delta)$ とおく.

- Δ が $\mathbb{k}$ -ホモロジー球面 であるとは, 任意の $\sigma \in \Delta$ に対して,

$$\tilde{H}_i(\text{lk}_\Delta(\sigma), \mathbb{k}) = \begin{cases} \mathbb{k}, & \text{if } i = \dim(\text{lk}_\Delta(\sigma)), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad - (*)$$

- Δ が境界を持たない $\mathbb{k}$ -ホモロジー多様体 であるとは, Δ が連結であり, 任意の $\sigma \in \Delta$ で $\sigma \neq \emptyset$ のとき $(*)$ が成り立つことをいう.
- Δ が疑多様体 であるとは, Δ が強連結 で, 任意の $(d-1)$ -face がちょうど 2 つのファセットに含まれることをいう (これは σ が Δ のファセットのとき $(*)$ が成り立つことを意味する).

任意の単体的複体 Δ に対して, Hochster の古典的な定理により, $\mathbb{k}[\Delta]$ が Gorenstein であるのは, Δ を錐でない頂点全体の集合 W に制限して得られる単体的複体 Δ_W が $\mathbb{k}$ -ホモロジー球面 であることと同値である (例えば [2, Theorem 5.6.1] を参照). 最後に, d 次元の疑多様体 Δ が *orientable* であるとは, $H_d(\Delta; \mathbb{Z}) \neq 0$ であり, $\mathbb{k}$ -向き付け可能 であるとは, $H_d(\Delta; \mathbb{k}) \neq 0$ であるという.

3 主結果

次が本稿の 1 つ目の主結果である.

Theorem A. Δ を単体的複体, $R = \mathbb{k}[\Delta]$ を Δ の *Stanley–Reisner* 環とし, R は *Cohen–Macaulay* であるとする. 以下が正しい:

(X) R が *punctured spectrum* 上 Gorenstein である $\Leftrightarrow$ ある $i \in \{0, 1, 2\}$ に対して $\text{tr}(\omega_R) = \mathfrak{M}_R^i$.

(Y) 以下の条件は同値である:

- (1) $\text{tr}(\omega_R) = \mathfrak{M}_R$, 即ち, R は *nearly Gorenstein* だが *Gorenstein* でない;
- (2) Δ は $n \geq 3$ 個からなる離散点の集合または長さ $n \geq 3$ の *path* と同型である.

(Z) 以下の条件は同値である:

- (1) $\text{tr}(\omega_R) = \mathfrak{M}_R^2$;
- (2) Δ は $\mathbb{k}$ -向き付け不可能な $\mathbb{k}$ -ホモロジー多様体である.

この結果は [20] で提起された問いに対して肯定的な解答を与える。即ち、次が正しい。

Corollary 3.1. 3次元以上の *nearly Gorenstein Stanley–Reisner* 環は**全て Gorenstein** である。

Almost Gorenstein 環のクラス ([9]) と *nearly Gorenstein* 環のクラスとの関係性については, [19, 20, 23] など研究されている。例えば, 標準的度数付きアフィン半群環のとき, *nearly Gorenstein* 環と *almost Gorenstein* 環の交わりは, 非 *Gorenstein* 環をごく一部しか含まないことが示されている ([19, Theorem 6.1] を参照)。この洞察を基に *Stanley–Reisner* 環を考えると, 同様の現象が生じることを解明した。次が本稿の 2 つ目の主結果である。

Theorem B. 以下の命題が成り立つ:

(X) *Punctured spectrum* 上 *Gorenstein* である *Stanley–Reisner* 環は全て *level* である。

(Y) Δ を単体的複体とする。 $R = \mathbb{K}[\Delta]$ を *Cohen–Macaulay* だが *Gorenstein* でない *Stanley–Reisner* 環とする。このとき, 以下の条件は同値である:

- (1) R は *punctured spectrum* 上 *Gorenstein* であり, かつ *almost Gorenstein* である;
- (2) R は *nearly Gorenstein* であり, かつ *almost Gorenstein* である;
- (3) R は *nearly Gorenstein* である;
- (4) Δ は $n \geq 3$ 個からなる離散点の集合または長さ $n \geq 3$ の *path* と同型である。

References

- [1] M. Bagherpoor and A. Taherizadeh, *Trace ideals of semidualizing modules and two generalizations of nearly Gorenstein rings*, *Communications in Algebra* **51** (2023), no. 2, 446–463. [↑1](#)
- [2] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay rings*, Cambridge university press, 1998. [↑3](#)
- [3] A. Caminata and F. Strazzanti, *Nearly Gorenstein cyclic quotient singularities*, *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry* **62** (2021), no. 4, 857–870. [↑1](#)
- [4] E. Celikbas, J. Herzog, and S. Kumashiro, *Traces of semi-invariants*, arXiv preprint, arXiv:2312.00983 (2023). [↑1](#)
- [5] H. Dao, T. Kobayashi, and R. Takahashi, *Trace ideals of canonical modules, annihilators of Ext modules, and classes of rings close to being Gorenstein*, *Journal of Pure and Applied Algebra* **225** (2021), no. 9, 106655. [↑1](#)
- [6] S. Ding, *A note on the index of Cohen–Macaulay local rings*, *Communications in Algebra* **21** (1993), no. 1, 53–71. [↑1](#)
- [7] A. Ficarra, *The canonical trace of Cohen–Macaulay algebras of codimension 2*, arXiv preprint, arXiv:2406.07517 (2024). [↑1](#)
- [8] A. Ficarra, J. Herzog, D. I. Stamate, and V. Trivedi, *The canonical trace of determinantal rings*, *Archiv der Mathematik* **123** (2024), no. 5, 487–497. [↑1](#)
- [9] S. Goto, R. Takahashi, and N. Taniguchi, *Almost Gorenstein rings—towards a theory of higher dimension*, *Journal of Pure and Applied Algebra* **219** (2015), no. 7, 2666–2712. [↑2](#), [4](#)
- [10] S. Miyashita and M. Varbaro, *The canonical trace of Stanley–Reisner rings that are Gorenstein on the punctured spectrum*, arXiv preprint, arXiv:2412.12860 (2024). [↑1](#)
- [11] T. Hall, M. Kölbl, K. Matsushita, and S. Miyashita, *Nearly Gorenstein polytopes*, *The Electronic Journal of Combinatorics* **30** (4) (2023). [↑1](#)

- [12] J. Herzog and E. Kunz, *Der kanonische Modul eines Cohen–Macaulay Rings*, Vol. 238, Lect. Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin, 1971. [↑1](#), [2](#)
- [13] J. Herzog, T. Hibi, and D. I. Stamate, *The trace of the canonical module*, *Israel Journal of Mathematics* **233** (2019), 133–165. [↑1](#), [2](#)
- [14] C. Huneke and A. Vraciu, *Rings that are almost Gorenstein*, *Pacific Journal of Mathematics* **225** (2006), no. 1, 85–102. [↑1](#)
- [15] R. Jafari, F. Strazzanti, and S. Z. Armengou, *On nearly Gorenstein affine semigroups*, arXiv preprint, arXiv:2411.12081 (2024). [↑1](#)
- [16] S. Kumashiro, N. Matsuoka, and T. Nakashima, *Nearly Gorenstein local rings defined by maximal minors of a $2 \times n$ matrix*, arXiv preprint, arXiv:2308.04234 (2023). [↑1](#)
- [17] D. Lu, *The chain algebra of a pure poset*, arXiv preprint, arXiv:2410.05024 (2024). [↑1](#)
- [18] J. Lyle and S. Maitra, *Annihilators of (co) homology and their influence on the trace ideal*, arXiv preprint, arXiv:2409.04686 (2024). [↑1](#)
- [19] S. Miyashita, *Comparing generalized Gorenstein properties in semi-standard graded rings*, *Journal of Algebra* **647** (2024), 823–843. [↑4](#)
- [20] ———, *Levelness versus nearly Gorensteinness of homogeneous rings*, *Journal of Pure and Applied Algebra* **228** (2024), no. 4, 107553. [↑1](#), [4](#)
- [21] ———, *A linear variant of the nearly Gorenstein property*, arXiv preprint, arXiv:2407.05629 (2024). [↑1](#)
- [22] M. Miyazaki and J. Page, *Non-Gorenstein loci of Ehrhart rings of chain and order polytopes*, *Journal of Algebra* **643** (2024), 241–283. [↑1](#)
- [23] A. Moscariello and F. Strazzanti, *Nearly Gorenstein vs almost Gorenstein affine monomial curves*, *Mediterranean Journal of Mathematics* **18** (2021), no. 4, 127. [↑4](#)
- [24] P. Srivastava, *On nearly Gorenstein simplicial semigroup algebras*, arXiv preprint, arXiv:2310.00619 (2023). [↑1](#)
- [25] R. P Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Vol. 41, Springer Science & Business Media, 2007. [↑2](#)